

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU

DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

DIREKTOREN: PROF. DR.-ING. K. KORDINA – PROF. DR.-ING. G. REHM

Ein neues rechteckiges Scheibenelement mit drei

Freiheitsgraden je Knotenpunkt

von

G. Iványi u. K. Pelle

BIBLIOTHEK
Institut für Baustoffe, Massolbau und Brandschutz
der Technischen Universität Braunschweig
Beethovenstraße 52
D-3000 Braunschweig
Univ.-Bibliothek

Braunschweig, Mai 1972



Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Allgemeines	1
2. Ermittlung der verallgemeinerten Steifigkeitsmatrix	1
3. Elementsteifigkeitsmatrix und Spannungen	2
4. Ermittlung der äquivalenten Knotenlasten	7
5. Einige Testbeispiele	8
5.1 Einfluß des Seitenverhältnisses der Elemente auf die Rechengenauigkeit	9
5.2 Konvergenzverhalten	10
5.3 Anwendungsbeispiele	11
5.3.1 Balken	11
5.3.2 Wandartiger Träger	13
6. Zusammenfassung	14
Literatur	14
Anhang	Seite 1 - 19

1. Allgemeines

Die Berechnung von Flächentragwerken mit der Methode "Finites Elemente" erfordert für die Berücksichtigung des "Scheibenzustandes" solche Elemente, die in den Knotenpunkten außer den Verschiebungsgrößen u und v auch die aus ihren Ableitungen gebildete "Rotation"

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

enthalten (Bild 1). Vor allem ist es wichtig, die Rotation bei Faltwerken und Schalen zu berücksichtigen, weil eine vollständige Kopplung der Platten- und Scheibengrößen bei Änderung der Flächennormalen nur dadurch ermöglicht wird ([1, 6]). Auch bei ebenen Scheibenproblemen zeigt sich jedoch eine erheblich schnellere Konvergenz der Lösungen, wenn θ_z als Verschiebungsgröße zusätzlich eingeführt wird. [3]

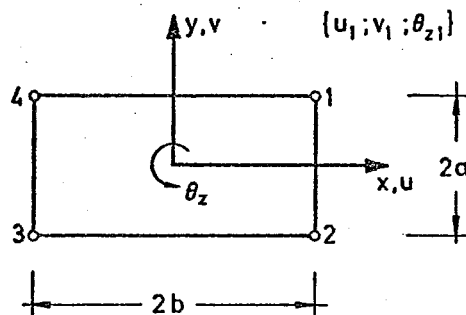


Bild 1

Nachfolgend wird ein einfacher Weg gezeigt, der durch einen unvollständigen und für u und v nicht gleichwertigen Ansatz dennoch ein gutes, in beiden Koordinatenrichtungen gleichmäßiges Konvergenzverhalten für das gewählte rechteckige Scheibenelement mit drei Verschiebungsgrößen je Knotenpunkt gewährleistet.

2. Ermittlung der verallgemeinerten Steifigkeitsmatrix

Mit den Ansätzen

$$(1) \quad \begin{aligned} u(x,y) &= \{1, x, y, xy, x^2y, y^2x\} \{\alpha\} = \{u\}^T \{\alpha\} \\ v(x,y) &= \{1, x, y, xy, x^2y, x^2\} \{\beta\} = \{v\}^T \{\beta\} \end{aligned}$$

läßt sich die verallgemeinerte Steifigkeitsmatrix $[k_q]$ zunächst ohne nähere Definition der Freiwerte wie folgt berechnen:

$$(2) \quad [k_q] = \int_{Vol} [P_q]^T [D] [P_q] dVol$$

wobei

$$(3) \quad [P_q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{u\}^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \{v\}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \{u\}^T}{\partial y} & \frac{\partial \{v\}^T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

und $[D]$ die Elastizitätsmatrix sind. Die ausführliche Darstellung beider Matrizen sowie die mit ihrer Hilfe nach (2) ermittelten Koeffizienten der verallgemeinerten Steifigkeitsmatrix $[k_q]$ sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

3. Elementsteifigkeitsmatrix und Spannungen

Die Elementsteifigkeitsmatrix $[k]$ ist in Kenntnis von $[k_q]$ aus folgender Transformation zu gewinnen:

$$(4) \quad [k] = [B]^T [k_q] [B]$$

wobei $[B]$ die Koeffizientenmatrix der Freiwerte in (1), ausgedrückt durch die Knotenverschiebungen, ist, d.h.

$$(5) \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}$$

Die Ansatzfunktion $u(x,y)$ läßt erkennen, daß zur eindeutigen Definition der u -Verschiebungen für die Ränder $x=\text{const.}$ drei, während für $y=\text{const.}$ nur zwei Knotenparameter notwendig sind. Entsprechendes gilt für die v -Verschiebungen, wenn die Achsen vertauscht werden. Um diesen Forderungen Rechnung zu tragen,

Tabelle 1

$$[k_q] = \int_V [P_q]^T [D] [P_q] dV$$

$$[P_q] = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & y & y^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & x & x^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & x & 2xy & 2y & \cdot & 1 & \cdot & y & 2xy & 2x \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[k_q] = 4abt \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \frac{b^2}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \nu & \cdot & \frac{\nu a^2}{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{5,5} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\nu b^2}{3} & \cdot & k_{5,11} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,6} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,10} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \frac{a^2}{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{10,10} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11,11} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{12,12} \end{bmatrix}$$

$k_{4,4} = \frac{a^2 \left(\frac{1-\nu}{2} \right) + b^2}{3}$
 $k_{5,5} = \frac{b^4}{5} + \frac{a^2 b^2 (2-2\nu)}{9}$; $k_{6,6} = \frac{b^2 (2-2\nu)}{3}$
 $k_{10,10} = \frac{a^2 + b^2 \left(\frac{1-\nu}{2} \right)}{3}$; $k_{6,10} = \frac{b^2 (1-\nu)}{3}$
 $k_{5,11} = \frac{a^2 b^2 (2-\nu)}{9}$; $k_{11,11} = \frac{a^4}{5} + \frac{a^2 b^2 (2-2\nu)}{9}$
 $k_{4,12} = \frac{a^2 (1-\nu)}{3}$; $k_{12,12} = \frac{a^2 (2-2\nu)}{3}$

ergeben sich folgende zwei Möglichkeiten für die Wahl der Knotenparameter:

$$(6) \quad \{\delta_I\}^T = \{u_1; v_1; -u_{y1}; u_2; v_2; v_{x2}; u_3; v_3; -u_{y3}; u_4; v_4; v_{x4}\}$$

$$\{\delta_{II}\}^T = \{u_1; v_1; v_{x1}; u_2; v_2; -u_{y2}; u_3; v_3; v_{x3}; u_4; v_4; -u_{y4}\}$$

Mac Leod [2] stellt für beide Fälle Elementsteifigkeitsmatrizen auf und fügt die so entstandenen Elemente schachbrettartig zum gewünschten System zusammen (Bild 2). Um den Programmieraufwand kleiner zu halten und gleichzeitig die bei Mac Leod nicht richtig wiedergegebene natürliche Symmetrieeigenschaft eines Systems zu erhalten, wird im folgenden ein anderer Weg beschritten.

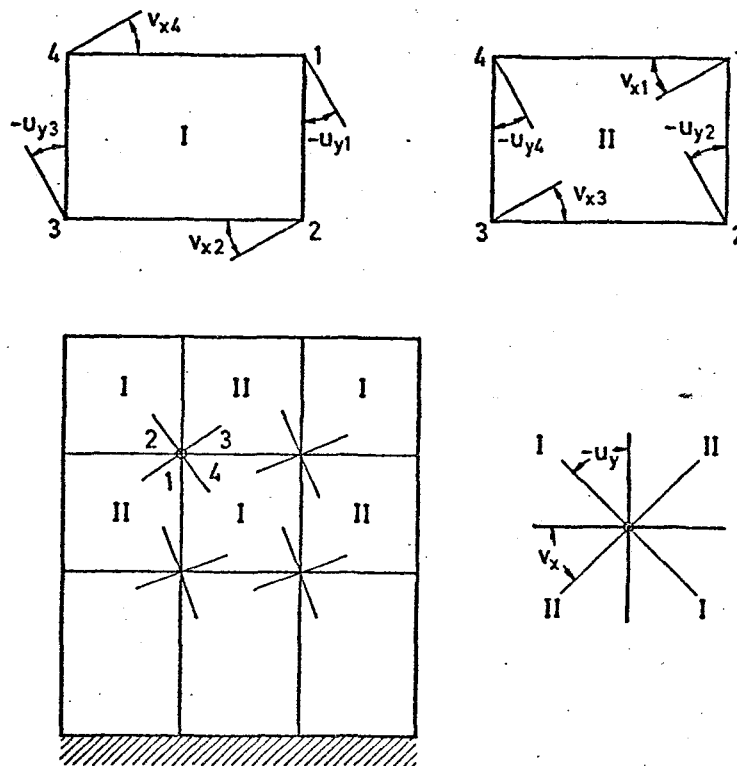


Bild 2

Es werden zunächst beide $[B]$ -Matrizen mit Hilfe der Knotenkoordinaten ermittelt:

$$(7) \quad \begin{aligned} \{\delta_I\} &= [A_I] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \longrightarrow [B_I] = [A_I]^{-1} \\ \{\delta_{II}\} &= [A_{II}] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \longrightarrow [B_{II}] = [A_{II}]^{-1} \end{aligned}$$

Die Matrizen $[A]$ und $[B]$ sind den Tabellen 2-5 zu entnehmen.

Tabelle 2

$$[A_1] = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & a & b & ab & ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & a & b & ab & a^2b & a^2 \\ . & . & -1 & -a & -2ab & -2b & . & . & . & . & . & . \\ \hline 1 & a & -b & -ab & ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & a & -b & -ab & -a^2b & a^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & -b & -2ab & 2a \\ \hline 1 & -a & -b & ab & -ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -a & -b & ab & -a^2b & a^2 \\ . & . & -1 & a & -2ab & 2b & . & . & . & . & . & . \\ \hline 1 & -a & b & -ab & -ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -a & b & -ab & a^2b & a^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & b & -2ab & -2a \end{array} \right]$$

Tabelle 3

$$[B_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \frac{3}{8} & . & \frac{1}{4}b & \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & . & -\frac{1}{4}b & \frac{1}{8} & . & . \\ \frac{3}{8a} & . & \frac{1}{4a}b & \frac{1}{8a} & . & . & \frac{3}{8a} & . & \frac{1}{4a}b & \frac{1}{8a} & . & . \\ \frac{1}{4b} & . & . & -\frac{1}{4b} & . & . & -\frac{1}{4b} & . & . & \frac{1}{4b} & . & . \\ \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . \\ \frac{1}{8ab^2} & . & -\frac{1}{4ab} & \frac{1}{8ab^2} & . & . & \frac{1}{8ab^2} & . & -\frac{1}{4ab} & \frac{1}{8ab^2} & . & . \\ -\frac{1}{8b^2} & . & -\frac{1}{4b} & \frac{1}{8b^2} & . & . & -\frac{1}{8b^2} & . & \frac{1}{4b} & \frac{1}{8b^2} & . & . \\ \hline . & \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4}a & . & \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & \frac{1}{4}a \\ . & \frac{1}{4a} & . & . & \frac{1}{4a} & . & . & -\frac{1}{4a} & . & . & -\frac{1}{4a} & . \\ . & \frac{1}{8b} & . & . & -\frac{3}{8b} & \frac{1}{4b}a & . & -\frac{1}{8b} & . & . & \frac{3}{8b} & \frac{1}{4b}a \\ . & \frac{1}{4ab} & . & . & -\frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & -\frac{1}{4ab} & . \\ . & \frac{1}{8a^2b} & . & . & \frac{1}{8a^2b} & \frac{1}{4ab} & . & -\frac{1}{8a^2b} & . & . & \frac{1}{8a^2b} & \frac{1}{4ab} \\ . & \frac{1}{8a^2} & . & . & -\frac{1}{8a^2} & \frac{1}{4a} & . & \frac{1}{8a^2} & . & . & -\frac{1}{8a^2} & \frac{1}{4a} \end{array} \right]$$

Tabelle 4

$$[A_{II}] = \begin{array}{c|cccccc|cccccc} 1 & a & b & ab & ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & a & b & ab & a^2b & a^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & b & 2ab & 2a \\ \hline 1 & a & -b & -ab & ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & a & -b & -ab & -a^2b & a^2 \\ . & . & -1 & -a & 2ab & 2b & . & . & . & . & . & . \\ \hline 1 & -a & -b & ab & -ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -a & -b & ab & -a^2b & a^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & -b & 2ab & -2a \\ \hline 1 & -a & b & -ab & -ab^2 & b^2 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -a & b & -ab & a^2b & a^2 \\ . & . & -1 & a & 2ab & -2b & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Tabelle 5

$$[B_{II}] = \begin{array}{c|cccc|c|cccc|c|cccc} \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & . & -\frac{b}{4} & \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & . & \frac{b}{4} \\ \frac{1}{8a} & . & . & \frac{3}{8a} & . & -\frac{b}{4a} & \frac{1}{8a} & . & . & \frac{3}{8a} & . & \frac{b}{4a} \\ \frac{1}{4b} & . & . & \frac{1}{4b} & . & . & \frac{1}{4b} & . & . & \frac{1}{4b} & . & . \\ \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . \\ \frac{1}{8ab^2} & . & . & \frac{1}{8ab^2} & . & \frac{1}{4ab} & \frac{1}{8ab^2} & . & . & \frac{1}{8ab^2} & . & \frac{1}{4ab} \\ \frac{1}{8b^2} & . & . & \frac{1}{8b^2} & . & \frac{1}{4b} & \frac{1}{8b^2} & . & . & \frac{1}{8b^2} & . & \frac{1}{4b} \\ \hline . & \frac{3}{8} & -\frac{a}{4} & . & \frac{1}{8} & . & . & \frac{3}{8} & \frac{a}{4} & . & \frac{1}{8} & . \\ . & \frac{1}{4a} & . & . & \frac{1}{4a} & . & . & \frac{1}{4a} & . & . & \frac{1}{4a} & . \\ . & \frac{3}{8b} & -\frac{a}{4b} & . & \frac{1}{8b} & . & . & \frac{3}{8b} & -\frac{a}{4b} & . & \frac{1}{8b} & . \\ . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . & . & \frac{1}{4ab} & . \\ . & \frac{1}{8a^2b} & \frac{1}{4ab} & . & \frac{1}{8a^2b} & . & . & \frac{1}{8a^2b} & \frac{1}{4ab} & . & \frac{1}{8a^2b} & . \\ . & -\frac{1}{8a^2} & \frac{1}{4a} & . & \frac{1}{8a^2} & . & . & -\frac{1}{8a^2} & -\frac{1}{4a} & . & \frac{1}{8a^2} & . \end{array}$$

Danach werden neue Freiwerte wie folgt definiert:

$$(8) \quad \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ 0 & v^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ 0 & v^T \end{bmatrix} [B^*] \{\delta^*\}$$

wobei

$$(9a) \quad [B^*] = \frac{1}{2} ([B_I] + [B_{II}])$$

und

$$(9b) \quad \{\delta^*\} = \frac{1}{2} (\{\delta_I\} + \{\delta_{II}\})$$

sind. Führt man (9b) mit den Gleichungen in (6) aus, so ist festzustellen, daß in jedem Knotenpunkt die gewünschte Größe

$$(9c) \quad \theta_{zi} = \frac{1}{2} (v_{xi} - u_{yi})$$

entsteht.

Die Elementsteifigkeitsmatrix kann dann nach (4) berechnet werden:

$$(4a) \quad [k^*] = [B^*]^T [k_q] [B^*]$$

Entsprechend ergibt sich die Spannungsmatrix

$$(10) \quad [S] = [D] [P_q] [B^*]$$

und damit die Spannungskomponenten in jedem Knotenpunkt zu

$$(11) \quad \{\sigma\} = [S] \cdot \{\delta^*\}$$

4. Ermittlung der äquivalenten Knotenlasten

Die am Elementrand angreifenden Belastungen müssen zu äquivalenten Knotenlasten umgeformt werden (Bild 3). Die zu erfüllende Bedingung ist dabei, daß beide Lastarten dieselbe Arbeit an beliebigen, virtuellen Verschiebungen leisten:

$$(12) \quad \int_L p(x,y) \begin{Bmatrix} \hat{u}_{(x,y)} \\ \hat{v}_{(x,y)} \end{Bmatrix} dL = \{s\}^T \{\hat{\delta}^*\}$$

wobei mit Λ virtuelle Größen bezeichnet werden. Aus (12) folgt z.B. für eine konstante Linienlast in Richtung der x-Achse am Rande $x=a$ (Bild 4):

$$(13) \quad p \int_{-b}^{+b} \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ 0 & v^T \end{bmatrix} [B^*] dy = \{s\}^T$$

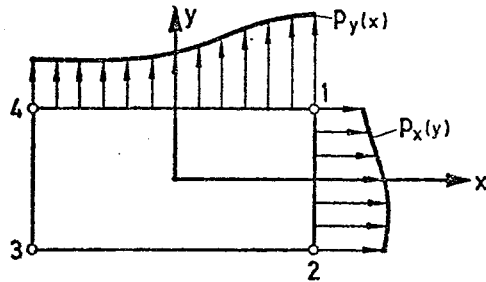


Bild 3

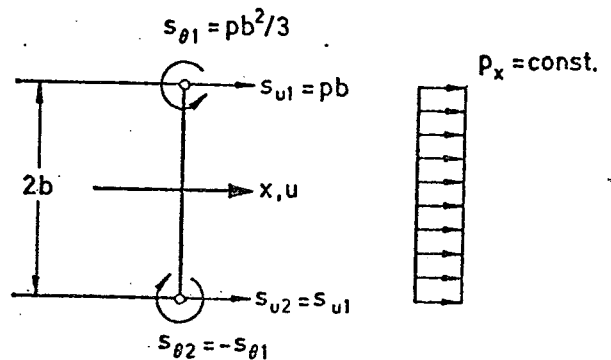


Bild 4

Nach Ausführung des Integrals erhält man:

$$(13a) \quad \{s_{1,2}\} = \begin{Bmatrix} s_{u1} \\ s_{v1} \\ s_{\theta 1} \\ s_{u2} \\ s_{v2} \\ s_{\theta 2} \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} b \\ 0 \\ b^2/3 \\ b \\ 0 \\ -b^2/3 \end{Bmatrix}$$

Im Gegensatz zum einfachsten rechteckigen Element müssen daher auch bei konstanten Linienlasten "Knotenmomente" angesetzt werden.

Die Berechnung anderer äquivalenter Knotenlasten kann ebenfalls nach (13) erfolgen.

5. Einige Testbeispiele

Das Verhalten des neuen rechteckigen Elementes wurde an verschiedenen Beispielen mit Hilfe eines Testprogrammes überprüft, das bis zu 100 Unbekannten eine direkte Lösung des Gleichungssystems erlaubt. Eine Liste dieses Prog-

ramms mit Flußdiagramm ist im Anhang wiedergegeben. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß die Unterprogramme

$$\text{RSU11} - [k_q]$$

$$\text{RSU12} - [B_I]$$

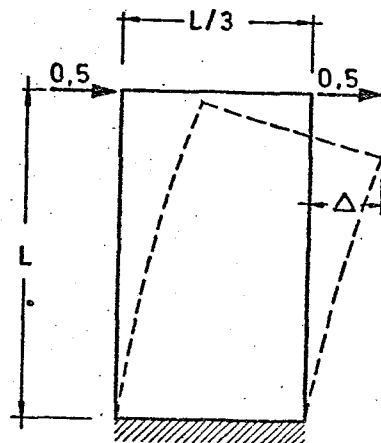
$$\text{RSU13} - [B_{II}]$$

$$\text{RSU32} - [s]$$

allgemein gehalten sind, so daß diese in beliebigen weiteren Programmen Verwendung finden können:

5.1 Einfluß des Seitenverhältnisses der Elemente auf die Rechengenauigkeit

Um die Grenzen festzustellen, bei welchen das Seitenverhältnis der Elemente die Rechengenauigkeit spürbar beeinträchtigt, wurde eine ähnliche Untersuchung wie bei Mac Leod [2] durchgeführt. Zu diesem Zweck wurde eine Klagscheibe nach Bild 5 in Querrichtung in 1 bis 6 Elemente unter-



Balken mit Schubverformung:

$$\Delta = \frac{L^3}{3EI} + \frac{1,2L}{GF}$$

$$\nu = 0,34 \quad \Delta = 117,6$$

$$\nu = 0,2 \quad \Delta = 116,6$$

$$(\nu = 0 \quad \Delta = 115,2)$$

Bild 5

teilt, während die Anzahl der Längsunterteilungen 15, 10, 7, 5, 4 und 3 betrug. Entsprechend bewegt sich die Gesamtanzahl der Unbekannten zwischen 84-99. Das Seitenverhältnis der Elemente variiert im Bereich $1/6 \leq b/a \leq 5$. Die errechneten Durchbiegungen Δ sind in Bild 6 über das Seitenverhältnis, bei $b/a < 1$ über dessen Reziprokwert, aufgetragen. Um einen Vergleich mit den Ergebnissen von Mac Leod zu ermöglichen, wurde für die Poissonsche Zahl $\nu = 0,34$ gewählt. Aus dem Vergleich beider Kurven

sind geringfügig bessere Eigenschaften des neuen Elementes festzustellen. Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Berechnungen von MacLeod durchweg mit 30 % mehr Unbekannten durchgeführt wurden.

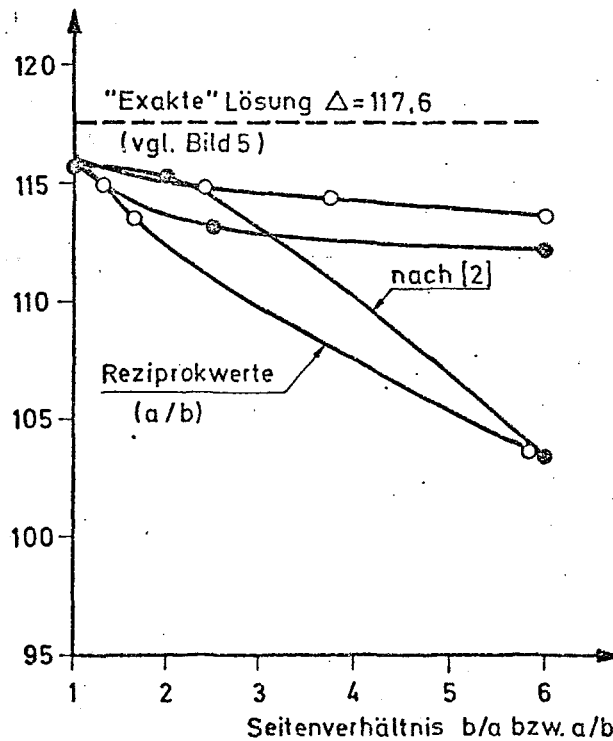


Bild 6

Grundsätzlich ist aus den Untersuchungen zu folgern, daß mit einer spürbaren Herabsetzung der Genauigkeit nur im Bereich $b/a < 1/4$ gerechnet werden muß.

5.2 Konvergenzverhalten

Unter Beachtung der in 5.1 beschriebenen Elementeeigenschaften wird die Konvergenz der Lösungen mit zunehmender Anzahl der Freiwerte ebenfalls an dem in Bild 5 dargestellten Kragsscheibe untersucht. Zum Vergleich dienen bekannte Ergebnisse mit anderen Elementtypen nach [5], (Bild 7). Aus dem Verlauf der einzelnen Kurven in Bild 7 ist festzustellen, daß das neue Element in etwa mit einem dreieckigen mit 18 Freiwerten je

Element - vollständige, quadratische Ansatzfunktionen für u und v, dementsprechend lineare Dehnungen - vergleichbar sind.

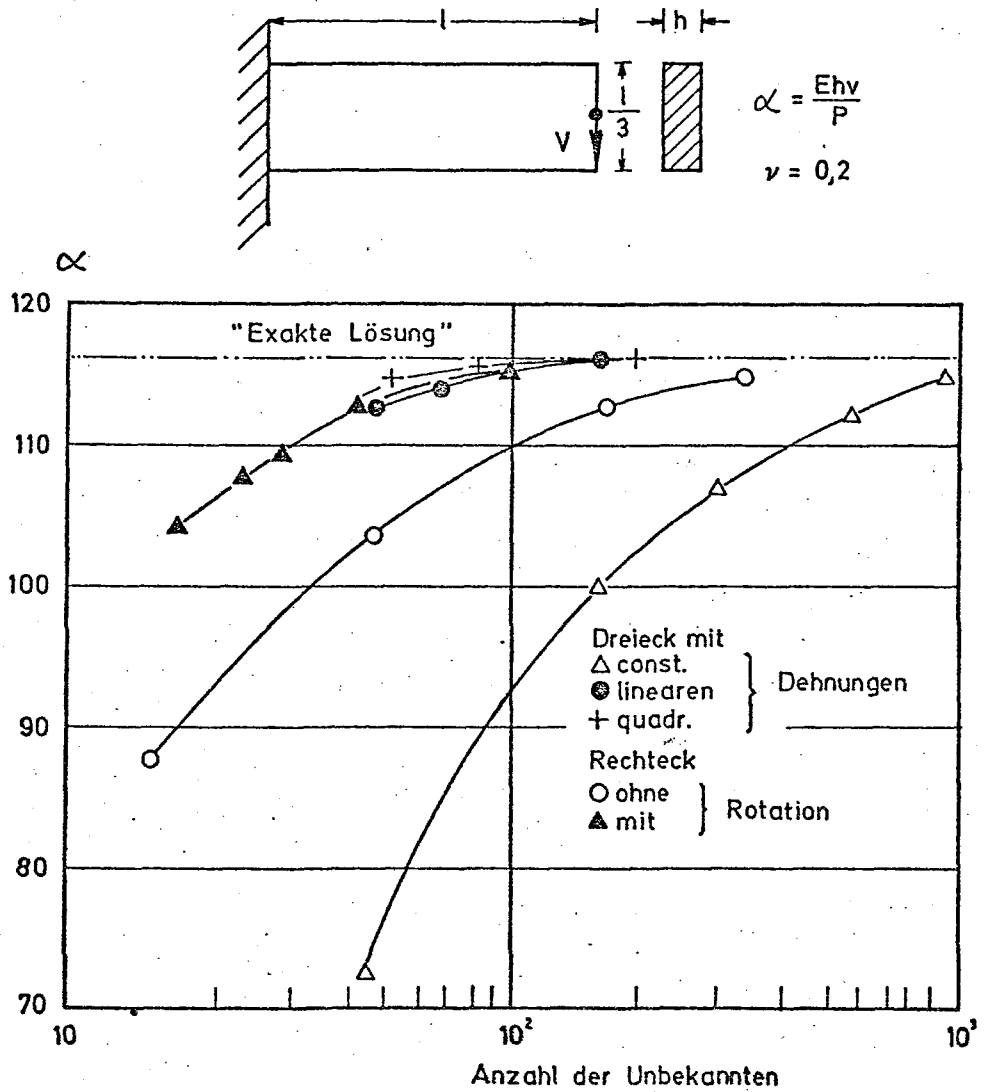


Bild 7

5.3 Anwendungsbeispiele

5.3.1 Balken

In [3] wird ein neues Scheibenelement beschrieben, dem in einer Richtung der Balkenansatz - Polynom dritten Grades -, während in der anderen eine lineare Ansatzfunktion zugrunde liegen. Mit diesem Element wurde ein Balken mit verschiedenen Schlankheiten untersucht.

Die Elemententeilung und sonstige Bezeichnungen sind aus Bild 8 ersichtlich.

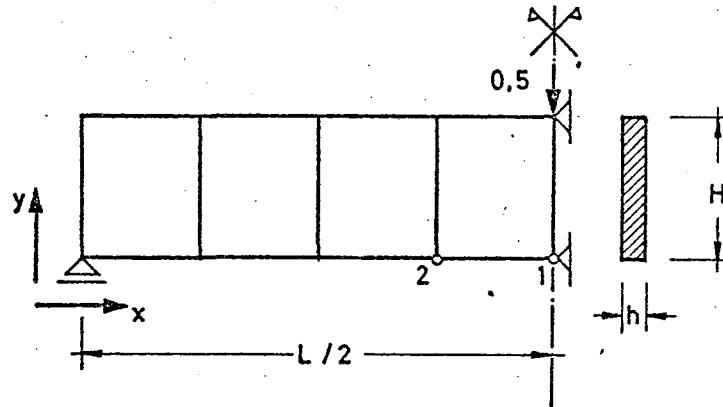


Bild 8

Zum Vergleich wurden die von ihm durchgeführten Berechnungen mit dem neuen Element nachvollzogen und die Ergebnisse in der Tabelle 6 gegenübergestellt. Sowohl Durchbiegungen als auch die Längsspannungen zeigen eine befriedigende Übereinstimmung mit den theoretischen Werten, die nach der Balkentheorie einschließlich Schubverformungen berechnet wurden.

Tabelle 6

H/L	Durchbiegung in Punkt 1 Faktor P/Eh					Spannung in Punkt 2 Faktor P/Hh				
	1	2		3		1	2		3	
	v	v	Δ%	v	Δ%	σ	σ	Δ%	σ	Δ%
1/4	18,19	18,30	0,1	18,14	0	4,50	4,499	0	4,501	0
1/8	132,59	130,42	-1,6	130,40	-1,6	9,00	8,996	0	9,000	0
1/16	1033,39	1007,69	-2,5	1017,00	-1,6	18,00	17,850	-0,8	18,020	0,1
1/32	8211,00	8191,90	0,2	8238,00	0,3	36,00	36,480	1,3	36,700	1,9

- 1 - nach Balkentheorie einschließlich Schubverformungen
- 2 - nach [3]
- 3 - rechteckiges Element mit Rotation

5.3.2 Wandartiger Träger

In Bild 9 ist die Elemententeilung und der Verlauf der Längsspannungen in Feldmitte und im Stützenquerschnitt eines unendlich langen punktgestützten wandartigen Trägers mit quadratischen Feldern dargestellt. Zum Vergleich wurden die analytisch berechneten Spannungsverläufe der Theimer [4] eingetragen. Mit Ausnahme des hohen Spitzenwertes der Längsspannungen über der Stütze ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen numerisch und analytisch errechneten Spannungen trotz der grobmaschigen Netzeinteilung festzustellen.

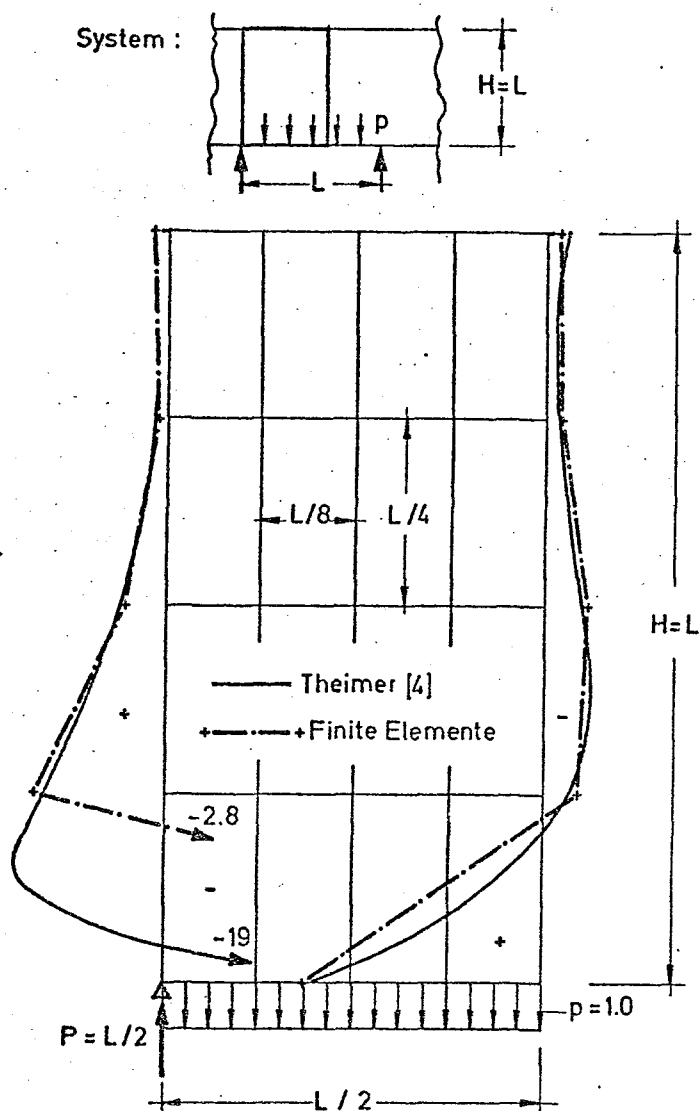


Bild 9

6. Zusammenfassung

Es wird über ein neues rechteckiges Scheibenelement berichtet, das in jedem Knotenpunkt außer den Verschiebungskomponenten u und v zusätzlich die Rotation als Freiheitsgrad enthält. Die Eigenschaften des neuen Elementes werden eingehend diskutiert. Anwendungsbeispiele zeigen bereits bei einer niedrigen Gesamtanzahl der Freiwerte eine gute Übereinstimmung mit theoretischen Lösungen.

Literatur

- [1] Fette, H.- May, B. : Finite Elemente für gekrümmte Flächentragwerke
Konstruktiver Ingenieurbau, Heft 11,
Bericht aus dem Institut für Konstruktiven
Ingenieurbau der Ruhr-Universität, Bochum,
Vulkan-Verlag, Essen
- [2] MacLeod, I.A. : New Rectangular Finite Element
for Shear Wall Analysis.
Journal of the Structural Division, March 1969
S. 399 - 409
- [3] Sisodiya, R.G.- Chenng, T.K. : A higher Order Inplane Parallelogram Element
and its Application to skewed curved Box-Girder
Bridges
Developments in Bridge Design and Construction,
Cardiff, 1971 (Preprint).
- [4] Theimer, O.F. : Hilfstafeln zur Berechnung wandartiger Stahl-
betonträger.
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1963
- [5] Tottenham, H.- Brebbia, C. : Finite Element Techniques in Structural Mechanics
Proceedings of a Seminar at the University
of Southampton, April 1970
- [6] Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Structural and
Cheung, T.K. Continuum Mechanics.
Mc Graw-Hill Publishing Co.
Ltd. London, 1967.

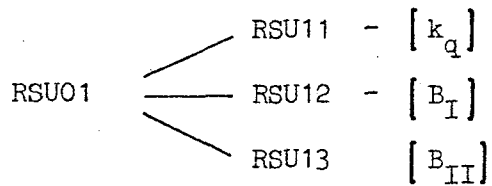
A n h a n g

Flußdiagrammm für

RSH01

1. Eingabe - vgl. Textkarten bei RSH01

2. Elementsteifigkeitsmatrix $[k]$



3. Globale Steifigkeitsmatrix - RSU02

4. Lösung des Gleichungssystems

SYMZ1 - Dreieckszerlegung

SYMZ3 - Vorwärtslösung

SYMZ4 - Rückwärtslösung

5. Ausgabe der Verschiebungen

6. Berechnung der Spannungen

RSU03 - RSU31 - RSU32 - $[s]$

(RSU12,RSU13)

7. Elementweise Ausgabe der Spannungen

```
C
C-----
C  PROGRAMM R S H O 1  BERECHNET RECHTECKIGE SCHEIBEN
C  MIT FINITEN ELEMENTEN. DIE RECHTECKIGEN SCHEIBENELE-
C  MENTE ENTHALTEN DREI FREIHEITSGRADE JE KNOTENPUNKT.
C-----
C
C
C  VARIABLEN***
C
C  ESTEF(I,J)  ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C  STEF(IJ)    GLOBALE STEIFIGKEITSMATRIX, LINEAR
C               GESPEICHERT - IJ=J*(J-1)/2+1
C  RECH(I)     RECHTE SEITE DES GLEICHUNGSSYSTEMS
C
C
C  EINGABE***
C
C  1. KARTENART  20A4 - 2-MAL
C
C  TEXT(I)      UEBERSCHRIFT
C
C  2. KARTENART  2I2 - 1-MAL
C
C  NANX,NANY    ANZAHL DER ELEMENTE IN X-
C               BZW. IN Y-RICHTUNG
C
C  3. KARTENART  5F10.4 - 1-MAL
C
C  A,B          HALBE SEITENLAENGEN DES ELEMENTES
C  T            SCHEIBENDICKE
C  E,ENU        E-MODUL UND POISSONSCHE ZAHL
C
C  4. KARTENART  I2 - 1-MAL
C
C  NRAN         ANZAHL DER PUNKTE MIT VORGEGEBENEN
C               RANDBEDINGUNGEN, MAX. 10
C
C  5. KARTENART  40I2 - 1-MAL
C
C  IRAN(I,J)    RANDBEDINGUNGEN
C               J=1 - PUNKTNR.
C               J=2-4 - =1, WENN U,V ODER TETAZ=0
C
C  6. KARTENART  I2 - 1-MAL
C
C  NLAST        ANZAHL DER LASTVEKTOREN, MAX. 10
C
C  7. KARTENART  20I2 - 1-MAL
C
C  ILAST(I,J)   BELASTETE PUNKTE
C               J=1 - PUNKTNR.
C               J=2 - =1 ODER 2 FUER DIE X- BZW.
C                   IN Y-RICHTUNG
C
C  8. KARTENART  8F10.4 - 1-2-MAL
C
C  FLAST(I)     LASTVEKTOR
C
C
```

```

C   DIREKT GERUFENE UNTERPROGRAMME***
C
C   RSU01      ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C   RSU02      GLOBALE STEIFIGKEITSMATRIX
C   SYMZ1,SYMZ3,SYMZ4  LOESUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS
C   RSU03      BERECHNUNG DER SPANNUNGEN
C
C   INDIREKT GERUFENE UNTERPROGRAMME***
C
C   RSU11,RSU12,RSU13,RSU31,RSU32
C
C   DIMENSION ESTEF(12,12),STEF(5050),RECH(100),C(1),CC(1)
C   DIMENSION QK(12,12),BK(12,12),BKT(12,12),ZW(12,12)
C   DIMENSION IRAN(10,4),ILAST(10,2),FLAST(10),TEXT(40)
C   DIMENSION SPAN(3,12)
C
C   EQUIVALENCE (STEF(1),QK(1,1)),(STEF(145),BK(1,1))
C   EQUIVALENCE (STEF(289),BKT(1,1)),(STEF(433),ZW(1,1))
C   EQUIVALENCE (STEF(580),SPAN(1,1))
C
C   909 CONTINUE
C
C       EINGABE DER GEOMETRIE
C
C   READ(2,103)  TEXT
C   -----
C   READ(2,100)  NANX,NANY
C   -----
C   READ(2,102)  A,B,T,E,ENU
C   -----
C
C       DATENAUSGABE
C
C   WRITE(3,203)  TEXT
C   WRITE(3,202)  A,B,T
C   WRITE(3,204)  NANX,NANY
C
C       ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C
C   CALL RSU01(QK,BK,BKT,ZW,ESTEF,A,B,ENU,E,T)
C
C       GLOBALE STEIFIGKEITSMATRIX
C
C   CALL RSU02(ESTEF,STEF,NANX,NANY)
C
C       HILFSGROESSEN
C
C   NK=(NANX+1)*(NANY+1)*3
C   NC=0
C   NKK=NK/3
C
C       RANDBEDINGUNGEN
C
C   READ(2,100)  NRAN
C   -----

```

```
      READ(2,100) ((IRAN(I,J),J=1,4),I=1,NRAN)
      -----
      DO 10 I=1,NRAN
      DO 10 J=2,4

      IR=IRAN(I,J)
      IF(IR) 10,10,11

      11 II=(IRAN(I,1)-1)*3+J-1
      ISTJ=II*(II-1)/2+II

      STEF(ISTJ)=STEF(ISTJ)*0.1E20

      10 CONTINUE

      DREIECKSZERLEGUNG

      CALL SYMZ1(STEF,NK,C,NC)

      LASTABHAENGIGE LOESUNG

      DO 30 J=1,NK
      30 RECH(J)=0.

      READ(2,100) NLAST
      -----
      READ(2,100) ((ILAST(II,JJ),JJ=1,2),II=1,NLAST)
      -----
      READ(2,102) (FLAST(II),II=1,NLAST)
      -----

      DO 40 K=1,NLAST
      IL=(ILAST(K,1)-1)*3+ILAST(K,2)
      40 RECH(IL)=FLAST(K)

      CALL SYMZ3(STEF,RECH,NK,C,CC,NC)
      CALL SYMZ4(STEF,RECH,NK,C,CC,NC)

      AUSGABE DER VERSCHIEBUNGEN

      WRITE(3,200)

      DO 50 II=1,NKK
      I1=(II-1)*3+1
      I2=I1+2

      50 WRITE(3,201) II,(RECH(I1I),I1I=I1,I2)

      SPANNUNGEN

      CALL RSU03(A,B,E,ENU,ESTEF,BK,SPAN,RECH,NANX,NANY)

      GOTO 909

      EIN- UND AUSGABEFORMATE
```

C

```
100 FORMAT(40I2)
102 FORMAT(8F10.4)
103 FORMAT(20A4)
```

C

C

```
200 FORMAT(1H0//10X'VERSCHIEBUNGEN'//20X'U'14X'V'14X'TETA'//)
201 FORMAT(5X,I4,4X,3E15.4)
203 FORMAT(1H1,20A4/1X,20A4)
202 FORMAT(//4X,'A=',F8.5/4X,'B=',F8.5/4X,'T=',F8.5//)
204 FORMAT(4X,'ANZAHL DER ELEMENTE IN X-RICHTUNG ',15/4X,'ANZAHL DER
1ELEMENTE IN Y-RICHTUNG ',15)
```

C

C

END

```

C      SUBROUTINE RSU01(QK,BK,BKT,ZW,ESTEF,A,B,NUE,E,T)
C-----
C      INTERPROGRAMM R S U 0 1 STELLT DIE STEIFIGKEITSMATRIX
C      EINES RECHTECKIGEN SCHEIBENELEMENTES MIT DREI FREIHEITS-
C      GRADEN - U,V UND TETAZ - JE KNOTENPUNKT AUF.
C-----
C
C      VARIABLEN***
C
C      BK(I,J)          INTERPOLATIONSMATRIX
C      QK(I,J)          VERALLGEMEINERTE STEIFIGKEITSMATRIX
C      ESTEF(I,J)       ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C
C      GERUFENE UNTERPROGRAMME***
C
C      RSU11            VERALLGEMEINERTE STEIFIGKEITSMATRIX
C      RSU12,RSU13      INTERPOLATIONSPOLYNOME
C
C      DIMENSION QK(12,12),BK(12,12),ESTEF(12,12),BKT(12,12),ZW(12,12)
C
C      DO 15 I=1,12
C      DO 15 J=1,12
15  ESTEF(I,J)=0.
C
C      VERALLG. STEIFIGKEITSMATRIX
C
C      CALL RSU11(A,B,NUE,E,T,QK)
C
C      INTERPOLATIONSPOLYNOM
C
C      CALL RSU12(A,B,ZW)
C      CALL RSU13(A,B,BK)
C      DO 9 I=1,12
C      DO 9 J=1,12
9  BK(I,J)=(BK(I,J)+ZW(I,J))*0.5
C
C      ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C
C      DO 20 I=1,12
C      DO 20 J=1,12
20  BKT(I,J)=BK(J,I)
C
C      DO 10 I=1,12
C      DO 10 J=1,12
C
C      ZW(I,J)=0.
C
C      DO 10 K=1,12
10  ZW(I,J)=ZW(I,J)+BKT(I,K)*QK(K,J)
C
C      DO 30 I=1,12
C      DO 30 J=1,12

```


- 7 -

```
      DO 30 K=1,12
30  ESTEF(I,J)=ESTEF(I,J)+ZW(I,K)*BK(K,J)
C
      RETURN
C
      END
```

```

C      SUBROUTINE RSU11(A,B,ENU,E,T,QK)
C      -----
C      UNTERPROGRAMM R S U 1 1 STELLT DIE VERALLGEMEINERTE
C      STEIFIGKEITSMATRIX EINES RECHTECKIGEN SCHEIBENELEMENTES
C      MIT DREI FREIHEITSGRADEN - U,V UND TETAZ - JE KNOTENPUNKT AUF
C      -----
C      VARIABLEN***
C      A,B          HALBE LAENGEN DES ELEMENTS
C                   IN X- BZW. Y-RICHTUNG
C      NUE          POISSONSCHES ZAHLE
C      E            E-MODUL
C      T            DICKE DES ELEMENTS
C      QK (I,J)     12 X 12 VERALLG. STEIFIGKEITSMATRIX
C
C      DIMENSION QK (12,12)
C
C      DO 10 I = 1,12
C      DO 10 J = 1,12
C
C      10 QK (I,J) = 0.
C
C      QK (2,2) = 1.
C      QK (2,5) = B*B/3.
C      QK (2,9) = ENU
C      QK (2,11) = A*A/3.
C
C      QK (3,3) = (1.-ENU)/2.
C      QK (3,8) = QK (3,3)
C
C      QK (4,4) = QK (2,11)*QK (3,3)+QK (2,5)
C      QK (4,12) = QK (2,11)*QK (3,3)*2.
C
C      QK (5,5) = B*B*B*B/5.+4.*QK (2,11)*QK (2,5)*QK (3,3)
C      QK (5,9) = ENU*QK (2,5)
C      QK (5,11) = QK (2,11)*QK (2,5)*(ENU+4.*QK (3,3))
C
C      QK (6,6) = 4.*QK (2,5)*QK (3,3)
C      QK (6,10) = 2.*QK (2,5)*QK (3,3)
C
C      QK (8,8) = QK (3,3)
C
C      QK (9,9) = 1.
C      QK (9,11) = A*A/3.
C
C      QK (10,10) = QK (2,11)+QK (2,5)*QK (3,3)
C
C      QK (11,11) = A*A*A*A/5.+4.*QK (2,11)*QK (2,5)*QK (3,3)
C
C      QK (12,12) = 4.*QK (2,11)*QK (3,3)
C
C      QK (2,11) = ENU*A*A/3.
C
C      DO 20 I = 3,12
C      J1 = I-1
C      DO 20 J = 2,J1

```

20 QK (I,J) = QK (J,I)

C
C

FAK = (4.*A*B*E*T)/(1.-ENU*ENU)

C

DO 30 I = 1,12

DO 30 J = 1,12

30 QK (I,J) = FAK*QK (I,J)

C
C

RETURN

C

END

SUBROUTINE RSU12(A,B,BK)

```
C
C-----
C  UNTERPROGRAMM R S U 1 2 STELLT DIE KOEFFIZIENTEN
C  DER INTERPOLATIONSMATRIX (BK) FUER EIN RECHTECKIGES
C  SCHEIBENELEMENT MIT DREI FREIHEITSGRADEN - U,V,TETAZ -
C  JE KNOTENPUNKT AUF. ES GILT - TETAZ(-UY1,VX2,-UY3,VX4)
C-----
C
C
C  VARIABLEN***
C
C  A,B          HALBE SEITENLAENGEN DES ELEMENTS
C               IN X- BZW. Y-RICHTUNG
C  BK(I,J)      KOEFFIZIENTEN DER INTERPOLATIONSMATRIX
C
C
C  DIMENSION BK(12,12)
C
C  DO 10 I=1,12
C  DO 10 J=1,12
10 BK(I,J)=0.
C
C
C  BK(1,1)=3./8.
C  BK(1,3)=B/4.
C  BK(1,4)=1./8.
C  BK(1,7)=3./8.
C  BK(1,9)=-B/4.
C  BK(1,10)=1./8.
C
C  BK(2,1)=3./(8.*A)
C  BK(2,3)=B/(4.*A)
C  BK(2,4)=1./(8.*A)
C  BK(2,7)=-BK(2,1)
C  BK(2,9)=BK(2,3)
C  BK(2,10)=-BK(2,4)
C
C  BK(3,1)=1./(4.*B)
C  BK(3,4)=-BK(3,1)
C  BK(3,7)=-BK(3,1)
C  BK(3,10)=BK(3,1)
C
C  BK(4,1)=BK(3,1)/A
C  BK(4,4)=-BK(4,1)
C  BK(4,7)=BK(4,1)
C  BK(4,10)=-BK(4,1)
C
C  BK(5,1)=-BK(4,1)/(2.*B)
C  BK(5,3)=-BK(4,1)
C  BK(5,4)=-BK(5,1)
C  BK(5,7)=BK(5,4)
C  BK(5,9)=-BK(4,1)
C  BK(5,10)=BK(5,1)
C
C  BK(6,1)=-BK(3,1)/(2.*B)
C  BK(6,3)=-BK(3,1)
C  BK(6,4)=-BK(6,1)
C  BK(6,7)=BK(6,1)
```

```
C      BK(6,9)=BK(3,1)
      BK(6,10)=BK(6,4)

C      BK(7,2)=1./8.
      BK(7,5)=3./8.
      BK(7,6)=-A/4.
      BK(7,8)=1./8.
      BK(7,11)=3./8.
      BK(7,12)=-A/4.

C      BK(8,2)=1./(4.*A)
      BK(8,5)=BK(8,2)
      BK(8,8)=-BK(8,2)
      BK(8,11)=BK(8,8)

C      BK(9,2)=BK(3,1)/2.
      BK(9,5)=-3.*BK(9,2)
      BK(9,6)=A*BK(3,1)
      BK(9,8)=-BK(9,2)
      BK(9,11)=-BK(9,5)
      BK(9,12)=BK(9,6)

C      BK(10,2)=BK(4,1)
      BK(10,5)=-BK(4,1)
      BK(10,8)=BK(4,1)
      BK(10,11)=-BK(4,1)

C      BK(11,2)=BK(10,2)/(2.*A)
      BK(11,5)=BK(11,2)
      BK(11,6)=-BK(4,1)
      BK(11,8)=-BK(11,2)
      BK(11,11)=BK(11,8)
      BK(11,12)=-BK(4,1)

C      BK(12,2)=BK(8,2)/(2.*A)
      BK(12,5)=-BK(12,2)
      BK(12,6)=BK(8,2)
      BK(12,8)=BK(12,2)
      BK(12,11)=-BK(12,2)
      BK(12,12)=-BK(8,2)

C
C      RETURN
C
      END
```

SUBROUTINE RSU13(A,B,BK)

```
C
C-----
C  UNTERPROGRAMM  R S U 1 3  STELLT DIE KOEFFIZIENTEN
C  DER INTERPOLATIONSMATRIX (BK) FUER EIN RECHTECKIGES
C  SCHEIBENELEMENT MIT DREI FREIHEITSGRADEN  - U,V,TETAZ -
C  JE KNOTENPUNKT AUF. ES GILT - TETAZ(VX1,-UY2,VX3,-UY4)
```

VARIABLEN***

```

A,B          HALBE SEITENLAENGEN DES ELEMENTS
              IN X- BZW. Y-RICHTUNG
BK(I,J)      KOEFFIZIENTEN DER INTERPOLATIONSMATRIX

```

DIMENSION BK(12,12)

```
DO 10 I=1,12
DO 10 J=1,12
10 BK(I,J)=0.
```

```
BK(1,1)=.125
BK(1,4)=.375
BK(1,6)=-B/4.
BK(1,7)=.125
BK(1,10)=.375
BK(1,12)=+B/4.
```

$$\begin{aligned} BK(2,1) &= .125/A \\ BK(2,4) &= .375/A \\ BK(2,6) &= -.25*B/A \\ BK(2,7) &= -.125/A \\ BK(2,10) &= -.375/A \\ BK(2,12) &= -.25*B/A \end{aligned}$$

```
BK(3,1)=.25/B
BK(3,4)=-.25/B
BK(3,7)=-.25/B
BK(3,10)=.25/B
```

```
BK(4,1)=.25/(A*B)
BK(4,4)=-.25/(A*B)
BK(4,7)=+.25/(A*B)
BK(4,10)=-.25/(A*B)
```

```
BK(5,1)=.5*BK(4,1)/B
BK(5,4)=-BK(5,1)
BK(5,6)=+BK(4,1)
BK(5,7)=-BK(5,1)
BK(5,10)=BK(5,1)
BK(5,12)=BK(5,6)
```

```
BK(6,1)=.125/(B*B)
BK(6,4)=-BK(6,1)
BK(6,6)=+BK(3,1)
BK(6,7)=BK(6,1)
BK(6,10)=-BK(6,1)
```

```
C      BK(6,12)=-BK(3,1)

C      BK(7,2)=.375
      BK(7,3)=-.25*A
      BK(7,5)=.125
      BK(7,8)=.375
      BK(7,9)=-BK(7,3)
      BK(7,11)=.125

C      BK(8,2)=.25/A
      BK(8,5)=.25/A
      BK(8,8)=-.25/A
      BK(8,11)=-.25/A

C      BK(9,2)=.375/B
      BK(9,3)=-.25*A/B
      BK(9,5)=-.125/B
      BK(9,8)=-BK(9,2)
      BK(9,9)=BK(9,3)
      BK(9,11)=-BK(9,5)

C      BK(10,2)=BK(4,1)
      BK(10,5)=-BK(4,1)
      BK(10,8)=BK(4,1)
      BK(10,11)=-BK(4,1)

C      BK(11,2)=-.125/(A*A*B)
      BK(11,3)=BK(4,1)
      BK(11,5)=BK(11,2)
      BK(11,8)=-BK(11,2)
      BK(11,9)=BK(4,1)
      BK(11,11)=-BK(11,2)

C      BK(12,2)=-BK(2,1)/A
      BK(12,3)=BK(8,2)
      BK(12,5)=-BK(12,2)
      BK(12,8)=+BK(12,2)
      BK(12,9)=-BK(12,3)
      BK(12,11)=-BK(12,2)

C
C      RETURN
C
      END
```

SUBROUTINE RSU02(ESTEF,STEF,NANX,NANY)

```
C
C -----
C  UNTERPROGRAMM R S U 0 2  STELLT DIE GLOBALE STEIFIG-
C  KEITSMATRIX EINER SCHEIBE, BESTEHEND AUS RECHTECKIGEN
C  ELEMENTEN MIT DREI FREIHEITSGRADEN JE KNOTENPUNKT AUF
C  -----
C
C
C  VARIABLEN***
C
C  NANX,NANY          ANZAHL DER ELEMENTE IN X-BZW. Y-RICHTUNG
C  NKNO(I)            KNOTENZUWEISUNG
C  IPUNK,JPUNK        KNOTENNUMMERN IM GLOBALEN SYSTEM
C  IELE,JELE          INTERNE ELEMENTKNOTENNUMMERN
C  IESTE,JESTE        INDIZES DER E.-STEIFIGKEITSMATRIX
C  ISTEJ,JSTEF        INDIZES IN DER GLOBALEN STEIFIGKEITSMATRIX
C  ISTJ              LINEARER INDEX IM OBEREN DREIECK
C                    DER GLOBALEN STEIFIGKEITSMATRIX
C                    STEIFIGKEITSMATRIX
C  STEF(IJ)           OBERES DREIECK DER GLOBALEN
C  ESTEF(I,J)         ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
C
C
C  DIMENSION STEF(5050),ESTEF(12,12),NKNO(4)
C
C  KSTK=(NANX+1)*(NANY+1)*3
C  KSTK=KSTK*(KSTK+1)/2
C  DO 2  I=1,KSTK
2  STEF(I)=0.
C
C          ELEMENTSCHLEIFE
C
C  DO 1 I=1,NANX
C  DO 1 J=1,NANY
C
C          KNOTENZUWEISUNG
C
C  NKNO(1)=I*(NANY+1)+J+1
C  NKNO(2)=I*(NANY+1)+J
C  NKNO(3)=(I-1)*(NANY+1)+J
C  NKNO(4)=(I-1)*(NANY+1)+J+1
C
C          PUNKTSCHLEIFE
C
C  DO 10 IELE=1,4
C  IPUNK=NKNO(IELE)
C
C  DO 10 JELE=1,4
C  JPUNK=NKNO(JELE)
C
C  IF(IPUNK-JPUNK) 11,11,10
C
11 DO 20 KK=1,3
C  IESTE=(IELE-1)*3+KK
C  ISTEJ=(IPUNK-1)*3+KK
C
C  IF(IPUNK-JPUNK) 21,22,10
```



```
C
21 L1=1
   GO TO 23
22 L1=KK
C
23 DO 20 LL=L1,3
   JESTE=(JELE-1)*3+LL
   JSTEF=(JPUNK-1)*3+LL
   ISTJ=JSTEF*(JSTEF-1)/2+ISTEF
C
20 STEF(ISTJ)=STEF(ISTJ)+ESTEF(IESTE,JESTE)
C
10 CONTINUE
C
C
1 CONTINUE
C
C
   RETURN
C
   END
```

```
      SUBROUTINE RSU03(A,B,E,ENU,ESTEF,BK,SPAN,RECH,NANX,NANY)
C-----
C  UNTERPROGRAMM R S U 0 3  BERECHNET IN JEDEM KNOTENPUNKT
C  EINES RECHTECKIGEN SCHEIBELEMENTES MIT 12 FREIHEITS-
C  GRADEN DIE SPANNUNGSKOMPONENTEN SIGX,SIGY,TAU.
C-----
C
C
C  VARIABLEN***
C
C  A,B           HALBE SEITENLAENGEN DES RECHTECKS
C  E,ENU         E-MODUL UND POISSONSCHES ZAHLE
C  NANX,NANY     ANZAHL DER ELEMENTE IN X- BZW.
C                IN Y-RICHTUNG
C  SPAN(I,J)     SPANNUNGSMATRIX IM PUNKT XI,ETA
C  RECH(I)       VERSCHIEBUNGSVEKTOR
C  HILF(I)       ELEMENTVERSCHIEBUNGSVEKTOR
C  ESTEF(I,J)    12*12 SPANNUNGSMATRIX DER
C                ELEMENTKNOTENPUNKTE
C  BK(I,J)       INTERPOLATIONSMATRIX
C
C  GERUFENE UNTERPROGRAMME***
C
C  RSU31
C
C  DIMENSION RECH(100),ESTEF(12,12),BK(12,12),SPAN(3,12)
C  DIMENSION HILF(12),NKNO(4),SIGTA(12)
C
C  WRITE(3,202)
C
C                ELEMENTSPANNUNGSMATRIX
C
C  CALL RSU31(A,B,E,ENU,ESTEF,BK,SPAN)
C
C                ELEMENTSCHLEIFE
C
C  DO 1 I=1,NANX
C  DO 1 J=1,NANY
C
C                KNOTENZUWEISUNG
C
C  NKNO(1)=I*(NANY+1)+J+1
C  NKNO(2)=NKNO(1)-1
C  NKNO(3)=(I-1)*(NANY+1)+J
C  NKNO(4)=NKNO(3)+1
C
C                ELEMENTVERSCHIEBUNGSVEKTOR
C
C  DO 2 II=1,4
C  IV=(NKNO(II)-1)*3
C
C  DO 2 JJ=1,3
C  IH=(II-1)*3+JJ
C  IR=IV+JJ
C  2 HILF(IH)=RECH(IR)
C
```

```
C          ELEMENTSPANNUNGEN
C
C      DO 3 II=1,12
C      SIGTA(II)=0.
C
C      DO 3 JJ=1,12
C      3 SIGTA(II)=SIGTA(II)+ESTEF(II,JJ)*HILF(JJ)
C
C          AUSGABE
C
C      WRITE(3,200) I,J
C
C      DO 4 II=1,4
C      IND1=(II-1)*3+1
C      IND2=IND1+2
C
C      4 WRITE(3,201) NKNO(II),(SIGTA(IND),IND=IND1,IND2)
C
C      1 CONTINUE
C
C      RETURN
C
C      200 FORMAT(//10X'I='I2,2X'J='I2/)
C      201 FORMAT(5X,I5,3E14.4)
C      202 FORMAT(1H1//10X'SPANNUNGEN'//15X·SIGX·10X·SIGY·10X·TAU /)
C
C      END
```

```

C
C      SUBROUTINE RSU31(A,B,E,ENU,ESTEF,BK,SPAN)
C-----
C      UNTERPROGRAMM R S U 3 1  ERMITTELT DIE ELEMENT-
C      SPANNUNGSMATRIX IN JEDEM KNOTENPUNKT
C-----
C
C
C      VARIABLEN***
C
C      SPAN(I,J)      ALLGEMEINE SPANNUNGSMATRIX
C      BK(I,J)        INTERPOLATIONSMATRIX
C      ESTEF(I,J)     ELEMENTSPANNUNGSMATRIX
C
C
C      GERUFENE UNTERPROGRAMME***
C
C      RSU12,RSU13,RSU32
C
C      DIMENSION ESTEF(12,12),SPAN(3,12),BK(12,12)
C
C
C      INTERPOLATIONSPOLYNOM
C
C      CALL RSU12(A,B,BK)
C      CALL RSU13(A,B,ESTEF)
C      DO 9 I=1,12
C      DO 9 J=1,12
C 9      BK(I,J)=(BK(I,J)+ESTEF(I,J))*0.5
C
C      DO 10 I=1,12
C      DO 10 J=1,12
C 10     ESTEF(I,J)=0.
C
C
C      DO 20 II=1,4
C      M=1-2*(II/3)
C      N=1-2*(II/2)+4*(II/4)
C      A1=FLOAT(M)*A
C      B1=FLOAT(N)*B
C
C      ALLGEMEINE SPANNUNGSMATRIX
C
C      CALL RSU32(A1,B1,E,ENU,SPAN)
C
C      DO 31 I=1,3
C      IZEIL=3*(II-1)+I
C      DO 31 J=1,12
C      DO 31 K=1,12
C 31     ESTEF(IZEIL,J)=ESTEF(IZEIL,J)+1.*SPAN(I,K)*BK(K,J)
C
C 20 CONTINUE
C
C      RETURN
C
C      END
```

SUBROUTINE RSU32(XI,ETA,E,ENU,SPAN)

```
C
C -----
C  UNTERPROGRAMM  R S U 3 2  STELLT DIE ALLGEMEINE
C  SPANNUNGSMATRIX EINES RECHTECKIGEN SCHEIBENELEMENTES
C  MIT DREI FREIHEITSGRADEN JE KNOTENPUNKT AUF
C -----
C
C  VARIABLEN***
C
C  XI, ETA      KOORDINATEN DES AUFUNKTES
C  E, ENU      E-MODUL UND POISSONSCHES ZAHL
C  SPAN(I,J)   SPANNUNGSMATRIX
C
C
C  DIMENSION SPAN(3,12)
C
C  DO 1 I=1,3
C  DO 1 J=1,12
1  SPAN(I,J)=0.
C
C  SPAN(1,2)=1.
C  SPAN(1,4)=ETA
C  SPAN(1,5)=ETA*ETA
C  SPAN(1,9)=ENU
C  SPAN(1,10)=ENU*XI
C  SPAN(1,11)=XI*SPAN(1,10)
C
C  SPAN(2,2)=ENU
C  SPAN(2,4)=ENU*ETA
C  SPAN(2,5)=ETA*SPAN(2,4)
C  SPAN(2,9)=1.
C  SPAN(2,10)=XI
C  SPAN(2,11)=XI*XI
C
C  SPAN(3,3)=(1.-ENU)/2.
C  SPAN(3,4)=XI*SPAN(3,3)
C  SPAN(3,5)=2.*ETA*SPAN(3,4)
C  SPAN(3,6)=2.*ETA*SPAN(3,3)
C  SPAN(3,8)=SPAN(3,3)
C  SPAN(3,10)=SPAN(3,6)/2.
C  SPAN(3,11)=SPAN(3,5)
C  SPAN(3,12)=2.*XI*SPAN(3,3)
C
C  FAK=E/(1.-ENU*ENU)
C  DO 2 I=1,3
C  DO 2 J=1,12
2  SPAN(I,J)=FAK*SPAN(I,J)
C
C  RETURN
C
C  END
```